

Лаборатория прикладной математики.

Численное интегрирование.

1. Введение

Основная идея приближенного вычисления определенного интеграла заключается в том, что подынтегральную функцию заменяют другой, близкой к ней функцией, первообразная которой легко находится элементарным образом.

Обычно в качестве «близкой» функции берут интерполяционный многочлен $P_m(x)$ невысокой степени m . Тогда приближенно принимают

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_m(x)dx. \quad (1)$$

В дальнейшем будем предполагать, что отрезок интегрирования $[a, b]$ разбит

с постоянным шагом $h = \frac{b-a}{n}$ на n частей.

Формула центральных прямоугольников имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_{1/2} + y_{3/2} + \dots + y_{i+1/2} + \dots + y_{n-1/2}) = I_u, \quad (2)$$

где $y_{i+1/2} = f(x_{i+1/2})$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_{i+1/2} = x_i + h/2$

Погрешность оценивается по формуле

$$\left| \int_a^b f(x)dx - I_u \right| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2} = \frac{M_2(b-a)h^2}{24}, \quad (3)$$

где $M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$.

Формула трапеций имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}(y_0 + y_n + \dots + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})) = I_{\text{тр}}. \quad (4)$$

Погрешность оценивается по формуле

$$\left| \int_a^b f(x) dx - I_{\text{тр}} \right| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2} = \frac{M_2(b-a)h^2}{12}, \quad (5)$$

где $M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$.

Формула Симпсона записывается так:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3n} ((y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2})) = I_c, \quad (6)$$

где

$$n = 2m, \quad y_0 = f(a), \quad y_{2m} = f(b), \quad y_i = f(x_i), \quad i = \overline{1, 2m-1}.$$

Погрешность оценивается с помощью формул:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - I_c \right| \leq \frac{M_4(b-a)^5}{180n^4} = \frac{M_4(b-a)h^4}{180}, \quad (7)$$

где $M_4 = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|$.

Приведенные оценки (3),(5) и (7) являются теоретическими. На практике же для оценки погрешности численного интегрирования широко применяется приближенное правило Рунге. Суть его состоит в том, что интеграл вычисляется по выбранной формуле (2),(4) или (6) дважды: один раз с шагом h , затем с шагом $h/2$. При этом погрешность вычисляется по формуле Рунге:

$$R \approx \frac{|I_h - I_{h/2}|}{2^k - 1}, \quad (8)$$

где I_h – приближенное значение интеграла с шагом h , $I_{h/2}$ – приближенное значение интеграла с шагом $h/2$, k – порядок метода, который определяется степенью шага в формулах погрешностей усечения (3), (5) и (7). Для метода центральных прямоугольников и метода трапеций $k = 2$, для метода Симпсона $k = 4$.

Вычисление интеграла с заданной точностью ε проводится по следующему алгоритму:

– интеграл вычисляется по одной из указанных выше формул с шагом h и

$h/2$;

– вычисляется погрешность R по Рунге (8);

– если $R \leq \varepsilon$, то вычисления прекращают, полагая

$$\int_a^b f(x)dx = I_{h/2},$$

– если $R > \varepsilon$, то вычисления повторяются с шагом $h/4$ и сравниваются $I_{h/2}$ и

т.д.

2. Задание

Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с шагом $h = 0,1$, используя формулы:

а) центральных прямоугольников (2);

б) трапеций (4);

в) Симпсона (6).

Оценить погрешность всех результатов, пользуясь правилом Рунге (8).

1. $\int_0^2 \arctg(x^2)dx.$

2. $\int_1^3 \frac{\sin x^2}{x^2} dx.$

3. $\int_{0,5}^{2,5} \cos \sqrt{x} dx.$

4. $\int_0^2 \sin(\sqrt{x})dx.$

5. $\int_{0,1}^{2,1} \frac{\sin 5x}{x} dx.$

6. $\int_0^2 e^{-0,1x^2} dx.$

7. $\int_{0,1}^{2,1} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx.$

8. $\int_1^3 x \arctg \sqrt{x} dx.$

9. $\int_0^2 x e^{-\sqrt{x}} dx.$

10. $\int_0^2 \sin(x^2)dx.$

11. $\int_0^2 \cos(x^2)dx.$

12. $\int_0^2 e^{\sin x} dx.$

13. $\int_0^2 \sqrt{x} \cos(\sqrt{x})dx.$

14. $\int_0^2 \sqrt{x} \sin(\sqrt{x})dx.$

15. $\int_0^2 e^{\cos x} dx.$

16. $\int_0^2 \sqrt{1+x^3} dx.$

17. $\int_0^2 \sqrt[3]{1+x^2} dx.$

18. $\int_0^2 \sqrt{x} e^x dx.$

19. $\int_0^2 \cos(e^{-x})dx.$

20. $\int_0^2 \sqrt{1+e^x} dx.$

21. $\int_0^2 \sqrt{2+\sin x} dx.$

22. $\int_0^2 \sqrt{3+\cos x} dx.$

23. $\int_0^2 x \sqrt{4+\sin x} dx.$

24. $\int_0^2 x \sqrt{2+x^3} dx.$

25. $\int_0^2 \sqrt{\sin x} dx.$