Классическое решение задачи Жевре для полосы

Кислов Н.В., Червяков А.В.

В работе рассмотрена задача Жевре [1] для полосы $x \in (-\infty, +\infty)$, $t \in (0, T)$ с естественной склейкой на оси x. Найдены интегральные формулы для решения этой задачи. В случае постоянных граничных значений получено точное решение задачи Жевре. Рассмотрена асимптотика решения при $T \to \infty$.

1. Постановка задачи, интегральное уравнение

Рассмотрим в полосе $\Pi = \{(x, y) : x \in (-\infty, +\infty); t \in (0, T)\}$ следующую задачу:

$$\begin{aligned}
&u_t - \operatorname{sgn} x \cdot u_{xx} = f(x,t)\\
&u(x,0) = u_0(x), x > 0\\
&u(x,T) = u_T(x), x < 0\\
&u(x,t) \in C^{1,0}(\Pi) \cap C(\overline{\Pi})\\
&u(x,t) \in C^{2,1}(\Pi^- \cup \Pi^+), \text{ где}\\
&\Pi^- = \Pi \cap (x < 0); \Pi^+ = \Pi \cap (x > 0)\\
&u_0(x) \in C^2(0,\infty); u_T(x) \in C^2(-\infty,0); f(x,t) \in L_2(\Pi) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Основная идея получения решения задачи (1) состоит в следующем. Рассматривается вспомогательная задача (2), решение которой хорошо известно [2]:

$$\begin{aligned}
&u_t - u_{xx} = f; x > 0; t > 0\\
&u(x,0) = u_0(x), x > 0\\
&u_x(0,t) = \psi(t), t > 0 \qquad (2)
\end{aligned}$$

Напишем явные формулы решения задачи (2)

$$u(x,t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^t \frac{\psi(\tau) \cdot \exp(-x^2/4 \cdot (t-\tau)) \cdot d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + V^+(x,t) + G^+(x,t),$$

где

$$V^+(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\xi \int_0^t f(\xi,t) \frac{(\exp(-(x+\xi)^2/4(t-\tau)) + \exp(-(x-\xi)^2/4(t-\tau)))}{\sqrt{t-\tau}} d\tau$$

$$G^+(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u_0(\xi) \cdot \frac{(\exp(-(x+\xi)^2/4t) + \exp(-(x-\xi)^2/4t))}{\sqrt{t}} \cdot d\xi$$

Используя преобразования $\eta = T - t, y = -x$ аналогично найдём решение задачи:

$$u_t + u_{xx} = f(x,t); x < 0; t < T$$
$$u(x,T) = u_T(x), x < 0$$
$$u_x(0,t) = \psi(t), t < T$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{T-t} \frac{\psi(T-\tau) \cdot \exp(-x^2/4 \cdot (T-t-\tau))}{\sqrt{T-t-\tau}} d\tau + V^-(x,t) + G^-(x,t)$$

$$V^-(x,t) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} d\xi \int_0^{T-t} f(-\xi, T-\tau) \cdot \frac{e^{-(x+\xi)^2/4(T-t-\tau)} + e^{-(x-\xi)^2/4(T-t-\tau)}}{\sqrt{T-t-\tau}} \cdot d\tau$$

$$G^-(x,t) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} u_T(-\xi) \cdot \frac{e^{-(x+\xi)^2/4(T-t)} + e^{-(x-\xi)^2/4(T-t)}}{\sqrt{T-t}} \cdot d\xi$$

Условие $u(-0,t) = u(+0,t), 0 < t < T$, позволяет написать основное интегральное уравнение:

$$\int_0^T \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{|t-\tau|}} \cdot d\tau = h(t), \text{ где}$$
$$h(t) = \sqrt{\pi} \cdot (H^+(t) - H^-(t))$$
$$H^+(t) = V^+(0,t) + G^+(0,t)$$
$$H^-(t) = V^-(0,t) + G^-(0,t) \qquad (3)$$

В частном случае при $f(x,t) = 0$, а также $u_0(x) = u_0 = const(x > 0)$, $u_T(x) = u_T = const(x < 0)$ интегральное уравнение имеет особенно простой вид:

$$\int_0^T \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{|t-\tau|}} \cdot d\tau = 1, \text{ где}$$
$$\varphi(t) = \frac{\psi(t)}{\sqrt{\pi} \cdot (u_0 - u_T)} \qquad (4)$$

2. Решение интегрального уравнения (3)

Уравнение (3) можно свести к сингулярному интегральному уравнению. В самом деле, заменим в (3) $t \to s$, умножим на $\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{t-s}}$ и произведём интегрирование. После несложных преобразований получим уравнение:

$$\pi \cdot \int_0^t \psi(\tau) \cdot d\tau + \int_0^T \psi(\tau) \cdot \ln\left|\frac{\sqrt{t}+\sqrt{\tau}}{\sqrt{t}-\sqrt{\tau}}\right| \cdot d\tau = \int_0^t \frac{h(s)}{\sqrt{t-s}} \cdot ds$$

Дифференцирование по t приводит к искомому сингулярному уравнению:

$$\pi \cdot \psi(t) - \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \int_0^T \frac{\psi(\tau) \cdot \sqrt{\tau}}{t-\tau} \cdot d\tau = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{h(s)}{\sqrt{t-s}} \cdot ds \equiv \mathrm{g(t)}$$

После ввода новых обозначений

$$\widetilde{g}(t) = \frac{g(t) \cdot \sqrt{t}}{\pi}; \widetilde{\psi}(t) = \psi(t) \cdot \sqrt{t}$$

Получим окончательно

$$\widetilde{\psi}(t) + \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^T \frac{\widetilde{\psi}(\tau)}{\tau - t} \cdot d\tau = \widetilde{g}(t) \qquad (6)$$

Приведём кратко схему решения уравнения (6) [3]. Вводим функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_0^T \frac{\widetilde{\psi}(s)}{\xi - z} \cdot d\xi$$

В таком случае решение уравнения (6) сводится к граничной задаче Римана с линией скачков $0 \le \xi \le T$

$$\Phi^+ - \Phi^- \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot\pi/4} \cdot \widetilde{g}$$

Решение задачи Римана даётся формулой [3]:

$$\Phi(z) = \frac{\chi(z)}{2\pi i} \cdot \int_0^T \frac{e^{-\mathrm{i}\cdot\pi/4}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\widetilde{g}(\xi)}{\chi^+(\xi) \cdot (\xi - \mathrm{z})} \cdot d\xi, \text{ где}$$

$$\chi(z) = \exp\left(-\frac{1}{4} \cdot \ln\left(\frac{T-z}{-z}\right)\right) \qquad (7)$$

Решение уравнения (6) получается с помощью функции (7) по известным формулам Сохоцкого:

$$\widetilde{\psi}(t)=\Phi^{+}-\Phi^{-}=\frac{\widetilde{g}(t)}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{t}{T-t}\right)^{1/4}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\int_{0}^{T}\left(\frac{T-\tau}{\tau}\right)^{1/4}\cdot\frac{\widetilde{g}(\tau)}{\tau-t}\cdot d\tau \quad (8)$$

В частном случае при $f(x,t)=0$,

$$u(x,0)=u_0=const, x>0$$

$$u(x,T)=u_T=const, x<0$$

$$\widetilde{g}(t)=\frac{u_0-u_T}{\sqrt{\pi}}$$

Соответствующее решение уравнения (6) имеет вид

$$\psi(t)=\frac{u_0-u_T}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{t(T-t)}}$$

Тем самым найдено точное решение задачи Жевре в этом частном случае:

$$u(x,t)=u_0+\frac{u_T-u_0}{\sqrt{2}\cdot\pi}\cdot\int_{0}^{t}\frac{\exp(-x^2/4(t-\tau))}{\sqrt[4]{\tau\cdot(T-\tau)}\cdot\sqrt{t-\tau}}\cdot d\tau;\ x>0, t>0$$

$$u(x,t)=u_T-\frac{u_T-u_0}{\sqrt{2}\cdot\pi}\cdot\int_{t}^{T}\frac{\exp(-x^2/4(\tau-t))}{\sqrt[4]{\tau\cdot(T-\tau)}\cdot\sqrt{\tau-t}}\cdot d\tau;\ x<0, t<T \quad (9)$$

В общем случае имеем:

$$g(t)=\frac{d}{dt}\int_{0}^{t}\frac{h(s)}{\sqrt{t-s}}\cdot ds=\frac{h(0)}{\sqrt{t}}+\int_{0}^{t}\frac{h'(s)}{\sqrt{t-s}}\cdot ds$$

Приведём явное выражение для функции $g(t)$ для общей задачи (1) в предположении, что $u_0(x), u_T(x)\in C^2$

$$g(t)=\frac{h(0)}{\sqrt{t}}+\pi\cdot u_0'(+0)-u_T'(-0)\cdot\ln\left(\frac{T+t}{T-t}\right)+\int_{0}^{t}\frac{\alpha(s)}{\sqrt{t-s}}\cdot ds, \quad (10)$$

где

$$\alpha(t)=\int_{0}^{\infty}u_0''(\xi)\cdot\frac{\exp(-\xi^2/4t)}{\sqrt{t}}\cdot d\xi-\int_{0}^{\infty}u_T''(-\xi)\cdot\frac{\exp(-\xi^2/4(T-t))}{\sqrt{T-t}}\cdot d\xi$$

Формула (10) позволяет построить главный член асимптотики задачи (1) при $T\to\infty$ и $f(x,t)=0$. Действительно, воспользуемся тем, что

$$h(0)=\sqrt{\pi}\cdot(u_0(+0)-u_T(-\infty)) \quad (11)$$

Следовательно для получения асимптотики решения задачи (1) при $T \to \infty$ можно использовать формулы (9) при больших значениях T, например, при $x > 0$ получаем

$$u(x,t) = u_0 + \frac{u_T(-\infty) - u_0(+\infty)}{\sqrt{2}\cdot\pi} \cdot \frac{F(x,t)}{\sqrt[4]{T}}, \text{ где}$$

$$F(x,t) = \int_0^t \frac{\exp(-x^2/4(t-\tau))}{\tau^{1/4}\cdot(t-\tau)^{1/2}} \cdot d\tau .$$

Литература:

1. Н.В. Кислов. Краевые задачи для дифференциально-операторных уравнений смешанного типа, Дифференциальные уравнения, 1983 г, т.19, №8.
2. Р. Курант. Уравнения с частными производными, М., «Мир», 1964 г.
3. П.П. Забрейко и др. Интегральные уравнения, М., «Наука», 1968 г.