# Элементы теории множеств и математической логики

## 1. Основные определения теории множеств

Понятие ***множества*** является одним из основных неопределяемых понятий математики и служит для описания совокупности предметов или объектов. Эти объекты, или ***элементы множества***, считаются отличимыми друг от друга и от объектов, не входящих в данное множество.

Элементы множества могут находиться в некоторых отношениях как между собой, так и с элементами других множеств. Отношение считается заданным, если для любого элемента (или множества) $X$ и элемента (или множества) $Y$ указано, связаны они этим отношением или нет.

***Отношение принадлежности***. Тот факт, что объект $a$ является элементом множества $A$, словесно выражается так: элемент $a$ ***принадлежит*** множеству $A$. Обозначение: $a \in A$. Отрицание этого факта выражается другим отношением: элемент $a$ не принадлежит множеству $A$. Обозначение: $a \notin A$.

Например: «точка $C$ принадлежит отрезку $AB$» записывается так: $C \in [AB]$.

***Отношение включения***. Говорят, что множество $B$ ***включено*** во множество $A$, если каждый элемент $B$ принадлежит $A$. Обозначение: $B \subset A$.

**Определение 1.**

***Подмножеством*** множества $A$ называется всякое множество $B$, удовлетворяющее условию $B \subset A$.

Например: отрезок $AB$, лежащий на прямой $a$, включен в прямую $a$ и является таким образом его подмножеством. $[AB] \subset a$.

**Следствие 1.**

Для любого множества $A$ справедливо включение $A \subset A$.

**Определение 2.**

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым*** множеством. Обозначение: $\varnothing$.

Пустое множество считается подмножеством любого множества.

Множества $A$ и $\varnothing$ называются ***несобственными*** подмножествами множества $A$. Все остальные подмножества множества $A$, если они существуют, – ***собственные*** подмножества $A$.

Нередко бывает так, что рассматривают только подмножества одного и того же множества $U$. Такое множество называют ***универсальным***.

Множество можно задать, перечислив все его элементы. Так, если $a$, $b$, $c$, $d$ – обозначения различных объектов, то множество $A$ этих объектов записывают как $A = \{a; b; c; d\}$.

Указанный способ применим только для конечных множеств, да и то при условии, что число элементов невелико. Другой способ задания множеств состоит в следующем: формулируют ***характеристическое свойство*** элементов множества, т.е. свойство, которым обладают все элементы данного множества и только они. Множество, для элементов которого указано характеристическое свойство, в фигурных скобках сначала пишется обозначение элемента, затем проводится вертикальная черта, после которой пишется характеристическое свойство элементов. Например, множество $M$ натуральных чисел, меньших 6, запишется так:

$$M = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 6\}.$$

**Определение 3.**

Два множества $A$ и $B$ ***равны***, если одновременно справедливы $A \subset B$ и $B \subset A$ или если множества $A$ и $B$ состоят из одних и тех же элементов. Обозначение: $A = B$.

## 2. Отношения между множествами

Пусть во множестве $A$ задано некоторое отношение "$\circ$".

**Определение 4.**

Отношение "$\circ$" ***рефлексивно***, если для любого элемента $a$ из множества $A$ выполнено $a \circ a$ (т.е. любой элемент связан отношением $\circ$ с самим собой).
Например: отношение равенства на множестве отрезков рефлексивно, так как любой отрезок равен сам себе.

**Определение 5.**

Отношение $\circ$ ***симметрично***, если из $a \circ b$ следует $b \circ a$ для любых элементов $a$ и $b$ множества $A$. Отношение равенства на множестве отрезков является симметричным, так как если $[AB] = [CD]$, то и $[CD] = [AB]$.

**Определение 6.**

Отношение $\circ$ называется ***транзитивным***, если из того, что $a \circ b$ и $b \circ c$ следует, что $a \circ c$. В частности, отношение равенства отрезков рефлексивно, так как если отрезок $AB$ равен отрезку $CD$, а отрезок $CD$ равен отрезку $MN$, то отрезок $AB$ равен отрезку $MN$.

**Определение 7.**

Отношение $\circ$ во множестве $A$ называется ***отношением эквивалентности***, если оно одновременно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Всякое отношение эквивалентности $\sim$ во множестве $A$ позволяет специальным образом различать элементы этого множества. Обозначим через $C(a)$ множество всех элементов $x$ из $A$, таких, что $x \sim a$ Это множество является подмножеством $A$, которое называется классом эквивалентности $a$. Если $b \sim a$ то в силу симметричности и транзитивности отношения $\sim$ любой элемент $x$, эквивалентный $a$, эквивалентен и $b$. Если же $b$ не эквивалентен $a$, то $C(a)$ и $C(b)$ не имеют общих элементов, потому что если $a \sim x$ и $x \sim b$, то в силу симметричности $a \sim x$ и $x \sim b$, и в силу транзитивности $a \sim b$ что противоречит условию. Таким образом, отношением эквивалентности множество $A$ разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности, при котором каждый элемент $A$ попадает в свой класс.

Как мы видели в приведенных выше примерах, равенство на множестве отрезков является отношением эквивалентности и задает его разбиение на классы эквивалентности. Каждый такой класс содержит отрезки заданной длины.

**Определение 8.**

***Пересечением*** множеств $A$ и $B$ называется множество, в которое входят те и только те элементы, которые одновременно принадлежат множествам $A$ и $B$ (общие элементы множеств $A$ и $B$). Обозначение: $A \cap B$, где символ $\cap$ – знак пересечения двух множеств. Два множества ***пересекаются***, если $A \cap B \neq \varnothing$, и ***не пересекаются***, если $A \cap B = \varnothing$.

Например: если две прямые $a$ и $b$ не пересекаются, то можно записать $a \cap b = \varnothing$, если же они пересекаются, то по определению их пересечением является общая точка $A$ ($a \cap b = A$). Пересечением луча $a$ с дополняющим его лучом $a'$ является их общее начало $O$ ($a \cap a' = O$).

**Определение 9.**

***Объединением*** двух множеств $A$ и $B$ называется множество, состоящее из тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств. Обозначение: $A \cup B$, где символ $\cup$ – знак объединения множеств.

Например: объединением луча $a$ с дополняющим его лучом $a'$ является прямая.

**Определение 10.**

***Разностью*** двух множеств $A$ и $B$ называется такое множество, в которое входят все те элементы, которые принадлежат $A$ и не принадлежат $B$. Обозначение: $A \setminus B$. Если $B$ – подмножество $A$, то $A \setminus B$ называют дополнением к $B$ и обозначают $B'$.

Например: разностью прямой $a$ и ее луча с началом $O$ является множество точек дополняющего луча $a'$ без начальной точки $O$.

Введенные операции обладают рядом свойств.

**Свойство 1.**

Пересечение и объединение множеств коммутативно (перестановочно): $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$.

**Доказательство**

Эти свойства вытекают из определения. Действительно, пусть $x \in A \cap B$, тогда $x \in A$ и $x \in B$, следовательно, $x \in B \cap A$. Отсюда $(A \cap B) \subset (B \cap A)$. Аналогично доказывается обратное утверждение $(B \cap A) \subset (A \cap B)$. Отсюда $A \cap B = B \cap A$.

Пусть $x \in A \cup B$, тогда либо $x \in A$, либо $x \in B$, но тогда $x \in B \cup A$ и $(A \cup B) \subset (B \cup A)$. Аналогично $(B \cup A) \subset (A \cup B)$. Следовательно, $A \cup B = B \cup A$.

**Свойство 2.**

Пересечение и объединение множеств ассоциативно: для любых множеств $A$, $B$ и $C$ имеем

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

**Доказательство**

Пусть $x \in (A \cap B) \cap C$, отсюда $x \in (A \cap B)$ и $x \in C$, или $x \in A$, $x \in B$, $x \in C$. Отсюда $x \in (B \cap C)$ и $x \in A$, следовательно, $x \in A \cap (B \cap C)$ и верно $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$. Наоборот, если $x \in A \cap (B \cap C)$, следует, что $x \in A$, $x \in C$, $x \in B$, откуда $x \in (A \cap B) \cap C$ и верно $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$. Отсюда $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (см. рис. 1 а), b)). Аналогично доказывается равенство множеств $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

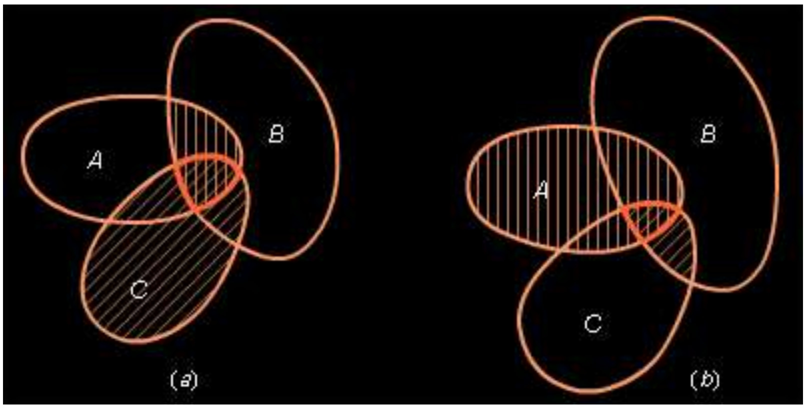



Рисунок 1.

**Свойство 3.**

Если $A \subset B$, то $A \cap B = A$, $A \cup B = B$.

**Доказательство**

Пусть $x \in A \cap B$, то есть $x \in A$ и $x \in B$, отсюда $x \in A$. Пусть теперь $x \in A$. Из условия $A \subset B$ следует, что $x \in B$, отсюда $x \in A \cap B$. Следовательно, $A \cap B = A$.

Пусть $x \in A \cup B$, тогда $x \in A$ или $x \in B$. Но $A \subset B$, и, следовательно, $x \in B$, $A \cup B \subset B$. Если $x \in B$, то по определению $x \in A \cup B$ и верно включение $B \subset A \cup B$. Отсюда $A \cup B = B$ (см. рис. 2).

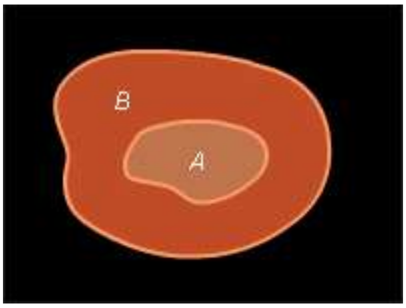



Рисунок 2.

Связь операций пересечения и объединения множеств отражает свойство дистрибутивности.

**Свойство 4.**

Для любых множеств $A$, $B$ и $C$ справедливы равенства:

а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. $\in$

**Доказательство**

a) Пусть $x \in A \cap (B \cup C)$. Тогда $x \in A$ и $x \in (B \cup C) \rightarrow x \in A$, $x \in B$ или $x \in C \rightarrow x \in A \cap B$ или $x \in A \cap C \rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \rightarrow A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Пусть $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Тогда $x \in (A \cap B)$ или $x \in (A \cap C) \rightarrow (x \in A, x \in B)$ или $(x \in A, x \in C) \rightarrow x \in A$ и $x \in B$ или $x \in C \rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$ и отсюда $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$. Окончательно имеем $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (см. рис. 16.2.3 a), b)).

Понятия множества и подмножества используются при определении многих понятий математики и, в частности, при определении геометрической фигуры.

Определим как универсальное множество плоскость. Тогда можно дать следующее определение геометрической фигуры в планиметрии.

**Определение 11.**

***Геометрической фигурой*** называется всякое множество точек плоскости.

Таким образом, как сама точка, так и конечное и бесконечное множество точек являются геометрическими фигурами.

Из определения 11 непосредственно следует, что объединение и пересечение геометрических фигур есть геометрическая фигура.

Если фигура $F_1$ является собственным подмножеством фигуры $F_2$, то говорят также, что $F_1$ – ***часть*** фигуры $F_2$. Например, отрезок $AB$ – часть прямой.

Чтобы наглядно отображать множества и отношения между ними, рисуют геометрические фигуры, которые находятся между собой в этих отношениях. Такие изображения множеств называют диаграммами Эйлера–Венна. Диаграммы Эйлера–Венна делают наглядными различные утверждения, касающиеся множеств. На них универсальное множество изображают в виде прямоугольника, а его подмножества – кругами. Диаграммы, представленные на рис. 3 a) – d), иллюстрируют понятия, введенные выше.

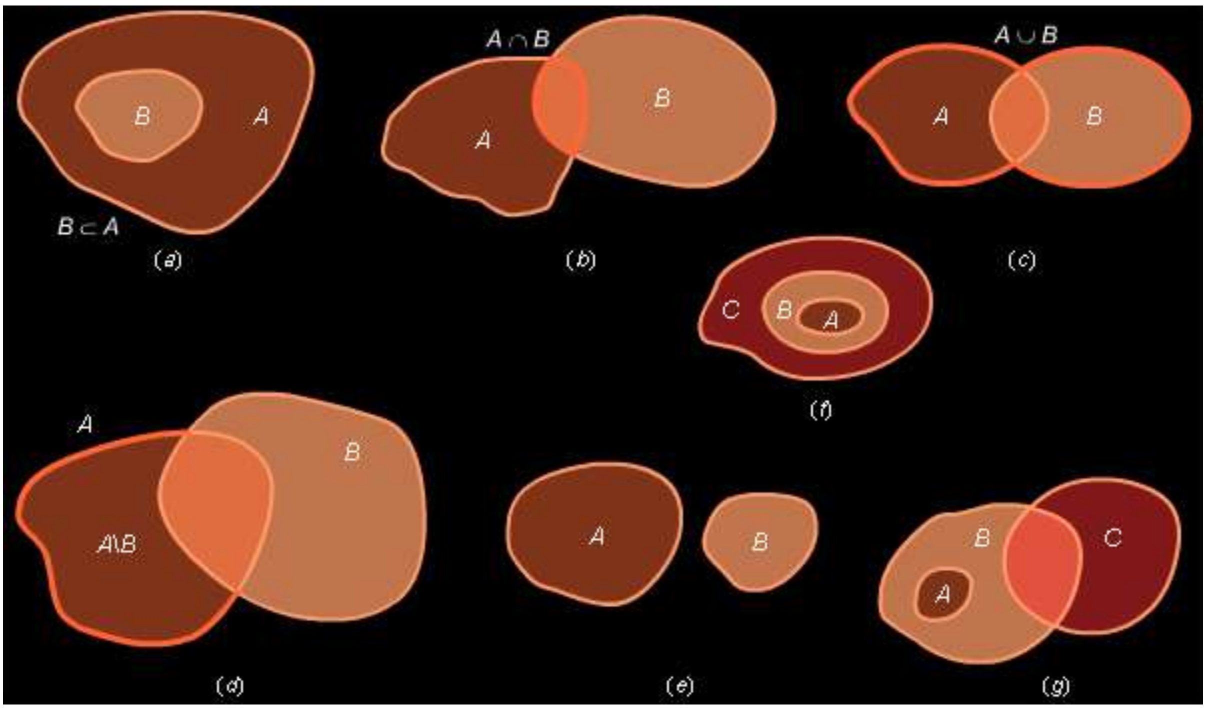



Рисунок 3.

Диаграммами Эйлера–Венна удобно пользоваться для наглядного изображения между различными понятиями.

На рисунке 3 f) представлена диаграммама Эйлера–Венна для иллюстрации утверждения: если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$

Рисунок 3 g) можно рассматривать как иллюстрацию опровержения утверждения: если $A \subset B$ и $C \cap A = \varnothing$, то $C \cap B = \varnothing$,

## 3. Утверждения в математике

В математике мы имеем дело с различными утверждениями, например,

$A \equiv$ {число 100 делится на 4};
$B \equiv$ {через две точки можно провести две прямые};
$C \equiv$ {число 0,00000001 очень мало}.

Относительно одних утверждений можно сказать, что в них говорится нечто правильное, относительно других – утверждается нечто неверное. Например, утверждение *A* – верное, утверждение *B* – неверное. Относительно утверждения *C* нельзя сказать, является оно верным или нет, так как оно не имеет точного смысла.

**Определение 12.**

Утверждение, которое является верным, называется ***истинным***.

**Определение 13.**

Утверждение, которое является неверным, называется ***ложным***.

**Определение 14.**

***Высказыванием*** называется любое утверждение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно.

Из определения 14 вытекает

**Свойство 5.**

Всякое высказывание является либо истинным, либо ложным (***закон исключенного третьего***).

**Свойство 6.**

Никакое высказывание не может быть одновременно истинным и ложным (***закон противоречия***).

**Свойство 7.**

Предложение, о котором невозможно однозначно решить вопрос, истинно оно или ложно, высказыванием не является.

На множестве высказываний можно ввести операции, позволяющие образовывать новые высказывания. Например, если заданы два высказывания *A* {сейчас солнечно} и *B* {сейчас ветрено}, то с помощью связок «и», «или», «если..., то...», «либо..., либо...», «тогда и только тогда, когда», «неверно, что» можно образовать новые высказывания вида: {сейчас солнечно и ветрено}, {сейчас солнечно или ветрено}, {если сейчас солнечно, то сейчас ветрено} и т.д. Такие высказывания называют составными, а входящие в них высказывания *A* и *B* – элементарными.

Два составных высказывания $A$ и $B$ называются равносильными, если они одновременно истинны или одновременно ложны при любых предположениях относительно истинности входящих в них элементарных высказываний. В этом случае пишут $A = B$.

**Определение 15.**

***Отрицанием*** высказывания $A$ называется высказывание, которое истинно, когда $A$ ложно, и ложно, если $A$ истинно. Обозначение: $\bar{A}$ Читается: «неверно, что $A$».

Данное определение записывают с помощью ***таблицы истинности***, в которой цифра «1» означает истинное высказывание, а цифра «0» – ложное.

Например: отрицанием высказывания {через две точки можно провести две прямые} является высказывание {через две точки нельзя провести две прямые}. Отрицанием высказывания {число 37 не делится на 2} будет высказывание {число 37 делится на 2}.

В дальнейшем для удобства и распространенности такого способа записи будем «И» обозначать цифрой «1», а «Л» - цифрой «0». В этом случае таблица для отрицания будет выглядеть следующим образом:

| | | |
|---|---|---|
| A | 1 | 0 |
| $\bar{A}$ | 0 | 1 |

**Определение 16.**

***Конъюнкцией*** двух высказываний $A$ и $B$ называется высказывание, которое истинно в том и только в том случае, если истинны оба высказывания. Обозначение: $A \wedge B$, читается: «$A$ и $B$». Таблица истинности имеет вид:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $B$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $A \wedge B$ | 1 | 0 | 0 | 0 |

Например: конъюнкцией высказываний $\{3 < 8\}$ и $\{8 < 11\}$ является высказывание $\{3 < 8 < 11\}$. Или, конъюнкцией высказываний {точка $A$ лежит на прямой $a$} и {точка $A$ лежит на прямой $b$} является высказывание {точка $A$ лежит на прямой $a$ и на прямой $b$}.

**Определение 17.**

***Дизъюнкцией*** двух высказываний $A$ и $B$ называется высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания. Обозначение: $A \vee B$, читается: «$A$ или $B$». Таблица истинности имеет вид:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $B$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $A \vee B$ | 1 | 1 | 1 | 0 |

Примеры: дизъюнкцией высказываний

- {3 < 8} и {3 = 8} является высказывание {3 $\leq$ 8 };
- {точка $A$ лежит на прямой $a$} и {точка $A$ лежит на прямой $b$} является высказывание {точка $A$ лежит на прямой $a$ или на прямой $b$}, где связка "или" не имеет разделительного смысла. То есть точка $A$ может лежать либо только на прямой $a$, либо только на прямой $b$, либо же на прямой $a$ и прямой $b$ одновременно.

**Свойство 9.**

Операции дизъюнкции и конъюнкции коммутативны.

$$A \vee B = B \vee A \text{ и } A \wedge B = B \wedge A.$$

**Доказательство**

Для доказательства достаточно сравнить таблицы истинности высказываний $A \vee B$ и $B \vee A$, $A \wedge B$ и $B \wedge A$. Покажем для $A \vee B$ и $B \vee A$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $B$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $A \vee B$ | 1 | 1 | 1 | 0 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $B$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $A$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $B \vee A$ | 1 | 1 | 1 | 0 |

**Свойство 10.**

Операции дизъюнкции и конъюнкции ассоциативны.

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C \text{ и } A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$$

**Доказательство**

Высказывание $A \wedge (B \wedge C)$ истинно только если одновременно истинны $A$, $B$ и $C$, а во всех других случаях – ложно. Высказывание $(A \wedge B) \wedge C$ также истинно, только если $A$, $B$ и $C$ одновременно истинны. Совпадение истинности двух высказываний доказывает их эквивалентность. Аналогично высказывание $A \vee (B \vee C)$ ложно, только если ложны одновременно все три высказывания $A$, $B$ и $C$, но в этом случае ложно и $(A \vee B) \vee C$. Во всех остальных случаях оба высказывания $A \vee (B \vee C)$ и $(A \vee B) \vee C$ – истинны. Следовательно, $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$

**Свойство 11.**

Для любых трех высказываний $A$, $B$ и $C$ справедливы равенства

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$
$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

**Доказательство**

Пусть $(A \vee B) \wedge C$ – истинно. Это возможно, только если истинны $C$ и $A \vee B$ а это значит, что $C$ – истинно, а $A$ и $B$ не являются одновременно ложными. Отсюда следует, что истинным является одно из двух высказываний $(A \wedge C)$ или $(B \wedge C)$, то есть $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ – истинно. Далее, если $(A \vee B) \wedge C$ – ложно, то $C$ и $A \vee B$ не являются одновременно истинными, то есть либо $C$ ложно, либо ложно $A \vee B$ или либо ложно $C$, либо ложны одновременно $A$ и $B$. Отсюда одновременно ложны $(A \wedge C)$ и $(B \wedge C)$, то есть ложно $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$. Следовательно, высказывания по определению равносильны и справедливо равенство $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

Пусть $(A \wedge B) \vee C$ – истинно. Тогда истинно либо $C$, либо $A \wedge B$ то есть либо истинно $C$, либо одновременно истинны $A$ и $B$. В любом случае тогда истинны $(A \vee C)$ и $(B \vee C)$ одновременно, а значит, истинно $(A \vee C) \wedge (B \vee C)$. Если же $(A \wedge B) \vee C$ – ложно, то одновременно ложны и $C$, и $A \wedge B$ то есть $C$ – ложно, а $A$ и $B$ не являются одновременно истинными (либо $A$ ложно, либо $B$ ложно). Тогда ложно либо $(A \vee C)$ либо $(B \vee C)$, то есть $(A \vee C) \wedge (B \vee C)$ – ложно. Отсюда $(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.

**Свойство 12.**

Дизъюнкция любого высказывания $A$ и его отрицания $\overline{A}$ – ***тождественно истинна***.
Обозначение: $A \vee \overline{A} = И$

**Свойство 13.**

Для любых двух высказываний $A$ и $B$ справедливы ***формулы де Моргана***:

$$\text{а) } \overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}, \quad \text{б) } \overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$$

**Доказательство**

а) Составим таблицы истинности правой и левой частей равенства.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $B$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $A \wedge B$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $\overline{A \wedge B}$ | 0 | 1 | 1 | 1 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $B$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $\overline{A}$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $\overline{B}$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $\overline{A} \vee \overline{B}$ | 0 | 1 | 1 | 1 |

Сравнивая последние строчки таблицы, приходим к требуемому равенству.
б) Аналогично, сравнивая таблицы истинности правой и левой частей, получаем их равносильность:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $B$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $A \vee B$ | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $\overline{A \vee B}$ | 0 | 0 | 0 | 1 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $B$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $\bar{A}$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $\bar{B}$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $\bar{A} \wedge \bar{B}$ | 0 | 0 | 0 | 1 |

**Определение 18.**

Высказывание «если $A$, то $B$» называют ***импликацией*** высказываний $A$ и $B$, оно- ложно лишь в случае, когда $A$ – истинно, а $B$ – ложно. Обозначение: $A \Rightarrow B$. Таблица истинности имеет вид:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $B$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $A \Rightarrow B$ | 1 | 0 | 1 | 1 |

Высказывание $A$ называют условием, а $B$ – заключением импликации.

**Свойство 14.**

Для любых двух высказываний $A$ и $B$ справедливо

$$A \Rightarrow B \;=\; \bar{A} \vee B$$

**Доказательство**

Следует из сравнения таблиц истинности:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $B$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $\bar{A}$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $A \Rightarrow B$ | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $\bar{A} \vee B$ | 1 | 0 | 1 | 1 |

| A | B | $\bar{A}$ | $\bar{B}$ | $A \Rightarrow B$ | $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ | $B \Rightarrow A$ | $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**Определение 19.**

Импликацией, ***обратной*** данной импликации $A \Rightarrow B$, называется импликация $B \Rightarrow A$.

**Определение 20.**

Импликацией, ***противоположной*** данной импликации $A \Rightarrow B$, называется импликация $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$.

Например: импликацией высказываний {100 делится на 4} и {100 – четное число} является высказывание {если 100 делится на 4, то 100 – четное число}. Импликация обратная данной будет тогда такой: {если 100 – четное число, то 100 делится на 4}. Как мы видим, если импликация истинна, то обратная к ней не всегда будет истинна. Противоположной к исходной будет импликация {если 100 не делится на 4, то 100 не является четным числом}.

**Свойство 15.**

Справедливы равенства $(A \Rightarrow B) = (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$ и $(B \Rightarrow A) = (\overline{A} \Rightarrow \overline{B})$

**Доказательство**

См. доказательство свойства 14.

**Определение 21.**

***Эквиваленцией высказываний*** $A$ и $B$ называется высказывание, которое истинно, когда оба высказывания $A$ и $B$ истинны или оба ложны. Обозначение: $A \Leftrightarrow B$ Таблица истинности имеет вид:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $B$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $A \Leftrightarrow B$ | 1 | 0 | 0 | 1 |

Например: эквиваленцией двух высказываний {точки $A$ и $B$ лежат в разных полуплоскостях от прямой $a$} и {отрезок $AB$ пересекает прямую $a$} является высказывание {точки $A$ и $B$ лежат в разных полуплоскостях от прямой $a$ тогда и только тогда, когда отрезок $AB$ пересекает прямую $a$}.

**Определение 22.**

Пусть предложение содержит переменную, которая может принимать различные значения, причем подстановка любого из значений переменной превращает предложение в высказывание. Тогда это предложение называют ***одноместным предикатом***. Множество $X$ всех значений переменной $x$ называют ***областью определения предиката***. Обозначение предиката: $A\ (x)$.

**Определение 23.**

***Множеством истинности предиката*** $A\ (x)$, $x \in X$ называется подмножество $T \subset X$, на котором $A\ (x)$ истинно.

Например: на рис. 1.3.2 изображены точки, соединенные несколькими отрезками. На множестве $X$, состоящем из точек $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$ ($X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$), задан одноместный предикат $A\ (x)$ = {к точке $x$ в рассматриваемой фигуре примыкают три отрезка}.

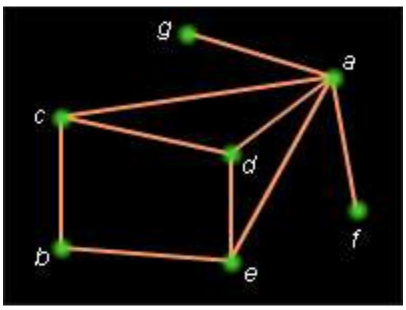



Рисунок 1.3.1.

Ниже приведена таблица истинности этого предиката:

| $A\ (a)$ | $A\ (b)$ | $A\ (c)$ | $A\ (d)$ | $A\ (e)$ | $A\ (f)$ | $A\ (g)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Множеством истинности данного предиката, соответственно, будет множество точек $T = \{c, d, e\}$.

**Определение 24.**

Два предиката $A\ (x)$ и $B\ (x)$ называются ***эквивалентными***, если у них совпадают области определения и множества истинности. Обозначение: $A(x) \sim B(x)$

**Определение 25.**

***Квантором общности*** называют символ $\forall$, означающий слово «все». Высказывание $(\forall x \in X)P(x)$ читается: «для всех $x$ из $X$ справедливо $P$ от $x$».
***Квантором существования*** называют символ $\exists$, означающий слово «существует».
Высказывание $\exists x \in X\ \ P(x)$ читается: «существует такое $x$ из $X$, что справедливо $P$ от $x$».

Справедливо а) $\overline{(\forall x)A(x)} = (\exists x)\overline{A(x)}$; б) $\overline{(\exists x)A(x)} = (\forall x)\overline{A(x)}$

**Доказательство**

а) Если истинно высказывание $\overline{\forall x\ \ A(x)}$ то это означает, что не для всех $x$ выполнено $A\ (x)$, другими словами, существует $x$, для которого выполнено $\overline{A(x)}$, то есть когда истинно выражение $\exists x\ \ \overline{A(x)}$. Если $\overline{\forall x\ \ A(x)}$ – ложно, то $\forall x\ \ A(x)$ – истинно, тогда $(\exists x)\overline{A(x)}$ – ложно. Это доказывает равносильность высказываний и равенство $\overline{\forall x\ \ A(x)} = \exists x\ \ \overline{A(x)}$.

б) Так как формула пункта а) верна для любого предиката $A\ (x)$, возьмем предикат $\overline{A(x)}$. Получаем $\overline{\forall x\ \ \overline{A(x)}} = \exists x\ \ \overline{\overline{A(x)}} = \exists x\ \ A\ \ x$. Строя отрицание обеих частей, получаем $\overline{\overline{\forall x\ \ \overline{A(x)}}} = \overline{\exists x\ \ A\ \ x}$. С учетом того, что для любого высказывания $\overline{\overline{A}} = A$, имеем $\forall x\ \ \overline{A\ \ x} = \overline{\exists x\ \ A\ \ x}$, что и требовалось доказать.

Так же, как и для высказываний, на множестве предикатов можно ввести операции отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции. Для этого устанавливают правила, которые позволяют находить множество истинности составного предиката, если известны множества истинности составляющих его элементарных предикатов.

Пусть на множестве $X$ заданы предикаты $A\ (x)$ и $B\ (x)$, множества истинности которых соответственно $T_1 \subset X$ и $T_2 \subset X$.

**Определение 26.**

***Отрицанием предиката*** $A(x)$ называется предикат $\overline{A(x)}, x \in X$, множество истинности $T$ которого является дополнением к множеству $T_1$, то есть $T = X \setminus T_1$.

**Определение 27.**

***Конъюнкцией предикатов*** $A(x)$ и $B(x)$ называется предикат $A(x) \wedge B(x)$ $x \in X$ множество истинности которого определяется равенством $T = T_1 \cap T_2$.

**Определение 28.**

***Дизъюнкцией предикатов*** $A(x)$ и $B(x)$ называется предикат $A(x) \vee B(x)$ $x \in X$ множество истинности которого определяется равенством $T = T_1 \cup T_2$

**Определение 29.**

***Импликацией предикатов*** $A(x)$ и $B(x)$ называется предикат $A(x) \Rightarrow B(x)$ $x \in X$ множество истинности которого определяется равенством $T = T' \cup T_2$, где $T' = X \setminus T_1$.

В том случае, когда импликация $A(x) \Rightarrow B(x)$ $x \in X$ истинна при всех значениях из множества $X$, говорят, что предикат $B(x)$ логически следует из предиката $A(x)$, и предикат $B(x)$ называют необходимым условием для предиката $A(x)$, а предикат $A(x)$ – достаточным условием для $B(x)$.

Если предикаты $A(x)$ и $B(x)$ на множестве $X$ эквивалентны, то каждый из них называют необходимым и достаточным условием для второго.

Например, в импликации {если $x$ – число натуральное, то оно целое} предикат $B(x)$ = {$x$ – число целое} логически следует из предиката $A(x)$ = {$x$ – число натуральное}. Следовательно, предикат $B(x)$ является необходимым условием для предиката $A(x)$, а предикат $A(x)$ – достаточным для $B(x)$. Используя эти термины, импликацию {если число $x$ натуральное, то оно целое} можно выразить так:

1. Для того чтобы число $x$ было натуральным, необходимо, чтобы оно было целым.
2. Для того чтобы число $x$ было целым, достаточно, чтобы оно было натуральным.

Часто приходится рассматривать предикаты, в которые входит не одна, а две и больше переменных. Они называются в зависимости от числа переменных двухместными, трехместными, ..., $n$-местными. Рассмотрим, например, следующие предложения, в которых под $x$ и $y$ понимают произвольные натуральные числа:

$A(x, y)$ = {$x < y$}, $B(x, y)$ = {$x + y = 10$}, $C(x, y)$ = {$x$ делится на $y$},
$D(x, y)$ = {$x + y$ есть простое число}.

Мы ничего не можем сказать об истинности или ложности этих утверждений, пока не сказано, какие значения принимают $x$ и $y$. Но если точно указано, чему равны $x$ и $y$, каждое из сформулированных утверждений превращается в высказывание – для одних пар $(x, y)$ истинное, для других ложное. Множество всех пар чисел $(x, y)$, для которых данный двухместный предикат есть истинное высказывание, называется множеством его истинности.

Приведем примеры высказываний, получающихся из указанных предложений при конкретных значениях $x$ и $y$:

- $A(1; 3) = \{1 < 3\}$ – истинное высказывание,
- $A(2; 2) = \{2 < 2\}$ – ложное высказывание,
- $A(5; 4) = \{5 < 4\}$ – ложное высказывание,

- $B\,(1;3) = \{1 + 3 = 10\}$ – ложное высказывание,
- $B\,(8;2) = \{8 + 2 = 10\}$ – истинное высказывание и т.д.

## 4. Аксиомы и теоремы

Изучение многих разделов математики основано на аксиоматическом методе. После формулировки основных понятий и аксиом все дальнейшие результаты теории – результаты логических рассуждений, которые оформляются в виде определенного вида утверждений. Рассмотрим это более подробно.

***Теорема*** – утверждение, требующее доказательства. Таковой является, например, известная из школьного курса теорема Фалеса:

если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

***Лемма*** – вспомогательная теорема, которая приводится для того, чтобы с ее помощью доказать следующую теорему или группу теорем.

Например, сформулируем следующее утверждение (лемма):

Пусть пара параллельных прямых $AB$ и $CD$ пересекают соответственно другую пару параллельных прямых $AC$ и $BD$. Тогда отрезок $AC$ равен отрезку $BD$, а отрезок $AB$ равен отрезку $CD$ ( см. рис. к лемме)

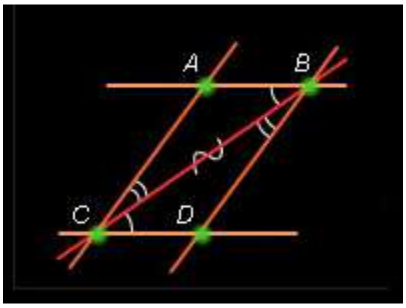



Рисунок к лемме.

и с помощью этой леммы дадим доказательство теоремы Фалеса.

**Доказательство**

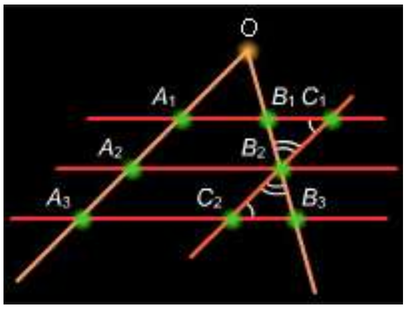



Рисунок
Теорема Фалеса.

Пусть $A_3OB_3$ – заданный угол, а $A_1B_1, A_2B_2$ и $A_3B_3$ – попарно- параллельные прямые и $A_1A_2 = A_2A_3$. Докажем, что $B_1B_2 = B_2B_3$. Проведем через точку $B_2$ прямую $C_1C_2$ параллельную прямой $A_1A_3$. По лемме $A_1A_2 = C_1B_2$, $A_2A_3 = B_2C_2$ и с учетом условия теоремы $C_1B_2 = B_2C_2$. Кроме того, $\angle B_1C_1B_2 = \angle B_2C_2B_3$ – как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых $A_1B_1, A_3B_3$ и секущей $C_1C_2$, а $\angle B_1B_2C_1 = \angle C_2B_2B_3$ как вертикальные. По второму признаку равенства треугольников $\triangle B_1C_1B_2 = \triangle B_3C_2B_2$. Отсюда $B_1B_2 = B_2B_3$. Теорема доказана

***Следствие*** (из определения, теоремы, аксиомы) – теорема, которая позволяет более полно трактовать содержание данной теоремы, аксиомы, определения.

Таким образом, основным средством познания (выяснения новых свойств) в математике является доказательство теорем.

Рассмотрим, например, формулировку следующей теоремы: если на луче отложить от начальной его точки два отрезка $AB$ и $AC$ и если $AB = AC$, то точки $B$ и $C$ совпадут. Условием теоремы является предложение {на луче отложить от начальной его точки два отрезка $AB$ и $AC$ и $AB = AC$}. Это предложение не является в данном виде высказыванием, но содержит описание множества объектов, относительно которых делается высказывание вида $AB = AC$. Из описания ясно, что речь идет о множестве отрезков луча $a$, отложенных от начальной его точки. Поскольку один конец отрезка фиксирован, то отрезок определяется однозначно точкой луча. Обозначим как $P$ множество точек луча, отличных от его начальной точки. Пусть $B \in P$ – заданная точка. Тогда условие теоремы является предложением относительно точки множества $P$. Перепишем условие теоремы в виде: $A(x)$ = {длина отрезка $Ax = AB$}. Очевидно, это предикат. Заключение теоремы есть предикат $B(x)$ = {точка $x$ совпадает с точкой $B$}. Тогда теорему можно переформулировать следующим образом: если $x$ – произвольная точка луча $AB$ такая, что $Ax = AB$, тогда точка $x$ совпадает с точкой $B$, которую можно записать в виде $\forall x \in X \quad A(x) \Rightarrow B(x)$ .

Утверждается, что любую теорему можно записать в таком виде (мы показали на данном примере, как это можно сделать в частном случае), поэтому проанализируем структуру теоремы.
В ней можно выделить три части:

1. ***Условие теоремы***: предикат $A(x)$, заданный на множестве точек луча $AB$, без его начальной точки.
2. ***Заключение теоремы***: предикат $B(x)$, заданный на множестве точек луча $AB$ за исключением точки $A$.
3. ***Разъяснительная часть***: в ней описывается множество объектов, о которых идет речь в теореме.

В символической записи теоремы к разъяснительной части теоремы следует отнести запись
$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ $\forall x \in P$

Пусть $\forall x \in X \quad A(x) \Rightarrow B(x)$ – запись истинной теоремы. Тогда ее условие и заключение образуют импликацию, истинную при всех $x$ из множества $X$, и, следовательно, предикат $B(x)$ логически следует из предиката $A(x)$. Поэтому заключение теоремы $B(x)$ является необходимым условием для условия $A(x)$, а условие $A(x)$ – достаточным для заключения теоремы $B(x)$.

**Определение 30.**

Пусть $A(x)$ и $B(x)$ – два предиката, заданные на множестве $X$. Тогда теоремы $\forall x \in X \quad A(x) \Rightarrow B(x)$ и $\forall x \in X \quad B(x) \Rightarrow A(x)$ называются ***обратными*** друг к другу.

**Определение 31.**

Если истинны обе теоремы $\forall x \in X \quad A(x) \Rightarrow B(x)$ и $\forall x \in X \quad B(x) \Rightarrow A(x)$, то говорят, что каждый из предикатов $A(x)$ и $B(x)$ является ***необходимым*** и ***достаточным*** условием другого. Обе теоремы при этом можно объединить в одну теорему вида $\forall x \in X \quad A(x) \Leftrightarrow B(x)$.

**Определение 32.**

Пусть дана теорема $\forall x \in X \quad A(x) \Rightarrow B(x)$

Теорема $\forall x \in X \quad \overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}$ называется ***противоположной*** к данной.

**Определение 33.**

Теорему $\forall x \in X \quad \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$ называют теоремой, ***противоположной обратной***.

**Следствие 1.**

Теорема $\forall x \in X \quad A(x) \Rightarrow B(x)$ равносильна противоположной обратной.

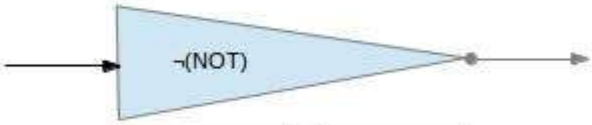
**Доказательство**

Заключение теоремы следует из свойства 15 и того факта, что теорема $\forall x \in X \quad A(x) \Rightarrow B(x)$ и противоположная обратной являются высказываниями.

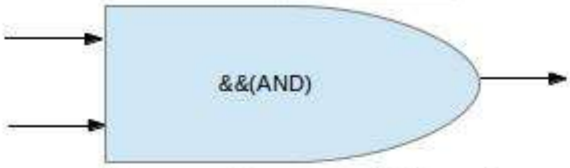
На основании этого утверждения основан метод ***доказательства от противного***. Суть этого метода состоит в том, что доказывают истинность теоремы, противоположной обратной, поскольку если эта теорема истинна, то и исходная теорема тоже верна.

## 5.Лабораторная работа. Конструирование логических функций.

В работе изучаются логические функции от нескольких логических переменных. По таблице истинности (исходные данные) получается представление функции в виде формулы и с его помощью программным образом моделируется модульная логическая схема. В настоящем практикуме использована программа xLogicCircuits из обширного ресурса D.J.Eck (http://math.hws.edu/eck/) , который рекомендуется для дальнейшего изучения. На рисунке ниже показаны основные логические функции -инверсия, конъюнкция и дизъюнкция и их таблицы истинности:




| X | ¬X |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |




| X | Y | X^Y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |


| X | Y | XvY |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Другие бинарные функции (их всего $2^4 = 16$ ) могут быть выражены через основные, например, для импликации и эквивалентности получаем соответственно:

$$X \rightarrow Y = \neg X \vee Y$$

$$X \leftrightarrow Y = (\neg X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y)$$

Рассмотрим в качестве примера функцию F трех переменных X,Y и Z, представленную таблицей

| **X** | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** | **1** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Z | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| F | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Для получения формулы функции F можно использовать дизъюнктивную форму

$$F=(X\wedge\neg Y\wedge\neg Z)\vee(\neg X\wedge Y\wedge\neg Z)\vee(\neg X\wedge Y\wedge Z)\vee(X\wedge Y\wedge Z) \qquad (1)$$

или конъюнктивную форму , эквивалентную предыдущей

$$F=(X\vee Y\vee Z)\wedge(\neg X\vee\neg Y\vee Z)\wedge(X\vee Y\vee\neg Z)\wedge(\neg X\vee Y\vee\neg Z) \qquad (2)$$

Эти формулы представляют одну и ту же заданную функцию. Первая из них образована для единичных значений функции F с помощью дизъюнкций однородных конъюнкций самих переменных , если они истинны или же их инверсий в случае нулевого значения. Вторая формула строится для нулевых значений функции F , в ней используются конъюнкции однородных дизъюнкций самих переменных , если они ложны или же их инверсий в случае истинных значений. Формулу (1) можно упростить , если учесть ,что

$$(\neg X\wedge Y\wedge\neg Z)\vee(\neg X\wedge Y\wedge Z)=(\neg X\wedge Y)\wedge(\neg Z\vee Z)=(\neg X\wedge Y)\wedge 1=(\neg X\wedge Y)$$

В новой редакции эта формула выглядит так:

$$F=(X\wedge\neg Y\wedge\neg Z)\vee(\neg X\wedge Y)\vee(X\wedge Y\wedge Z) \qquad (3)$$

Точно также упрощается формула (2) , она принимает следующий вид :

$$F=(X\vee Y)\wedge(\neg X\vee\neg Y\vee Z)\wedge(\neg X\vee Y\vee\neg Z) \qquad (4)$$

Для построения модульной логической схемы запустим программу xLogicCircuits . На рис.1 показано начальное расположение

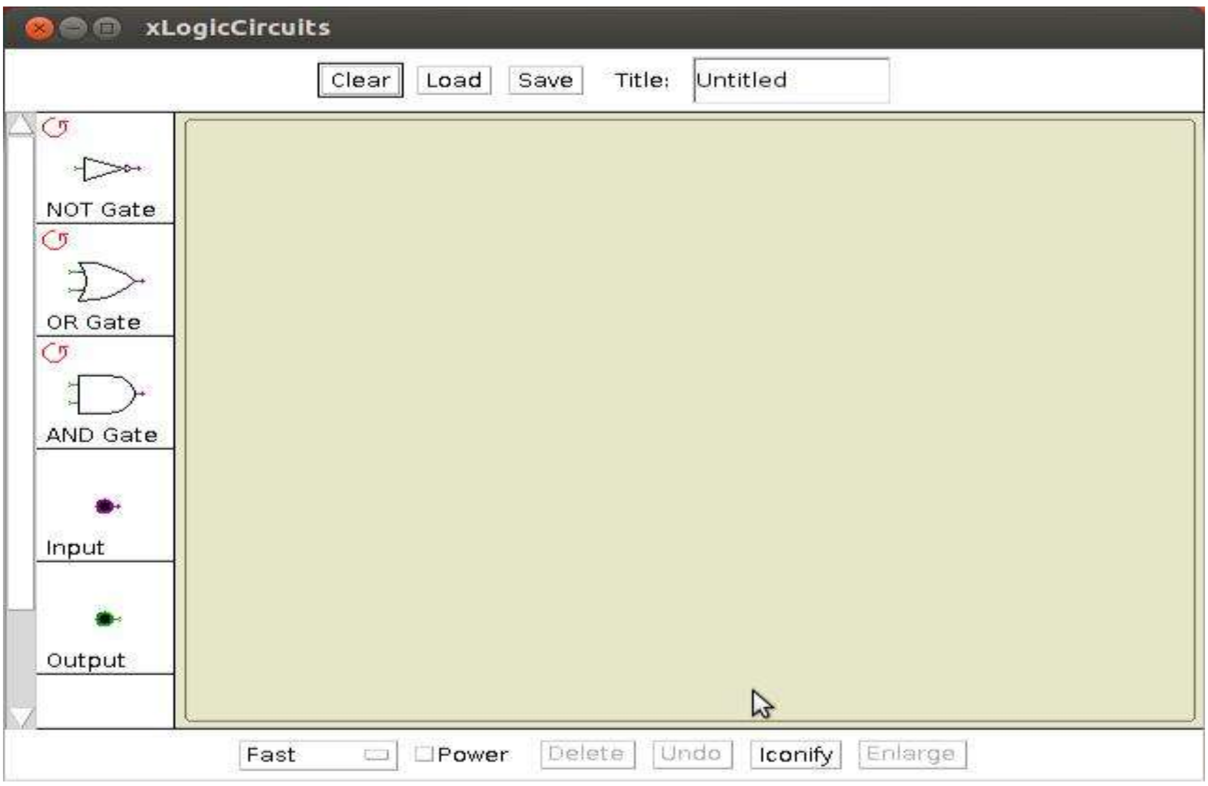



рис. 1

Возьмем за основу формулу (3) и для каждого слагаемого построим подходящий модуль. Слагаемому ($X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$) соответствует Mod 1 ,показанный на рис. 2

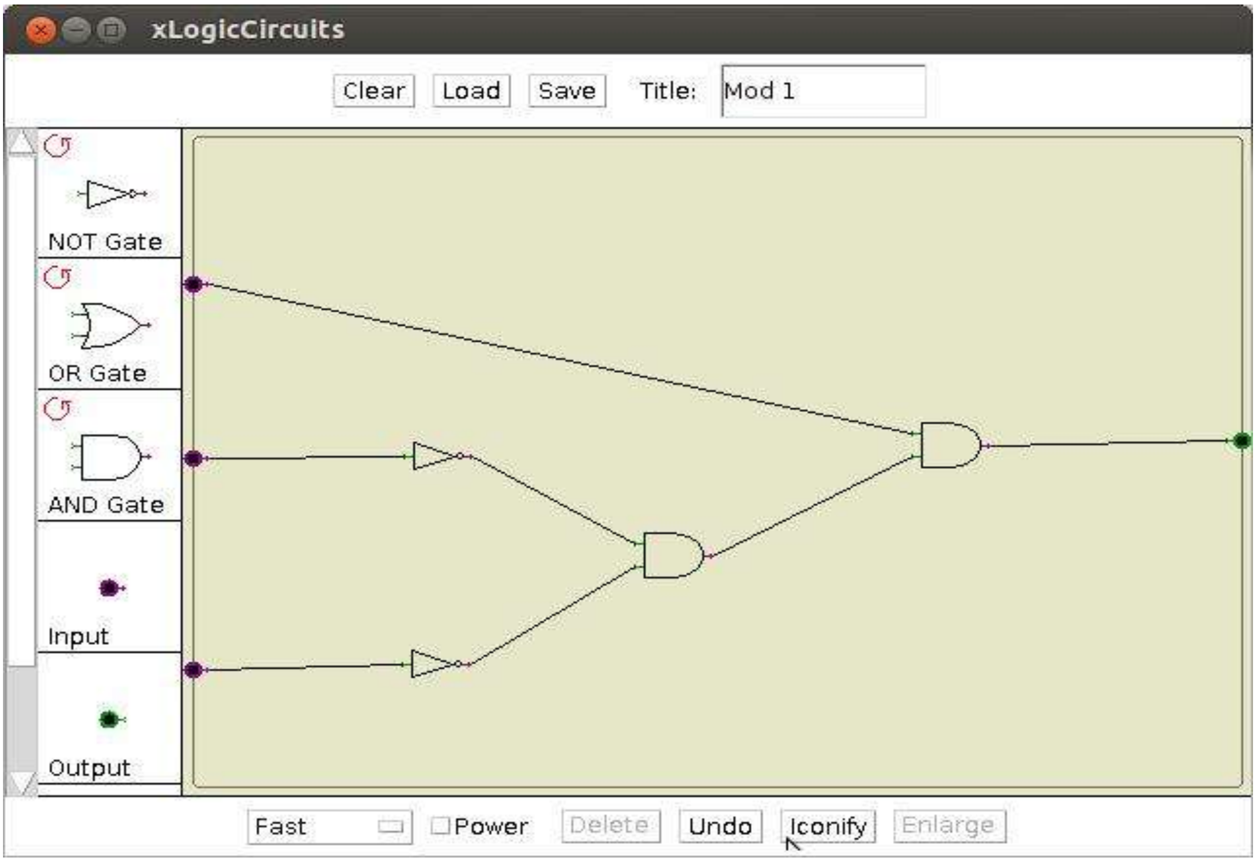



рис. 2

Слагаемому ($\neg X \wedge Y$ ) соответствует Mod 2 ,показанный на рис. 3

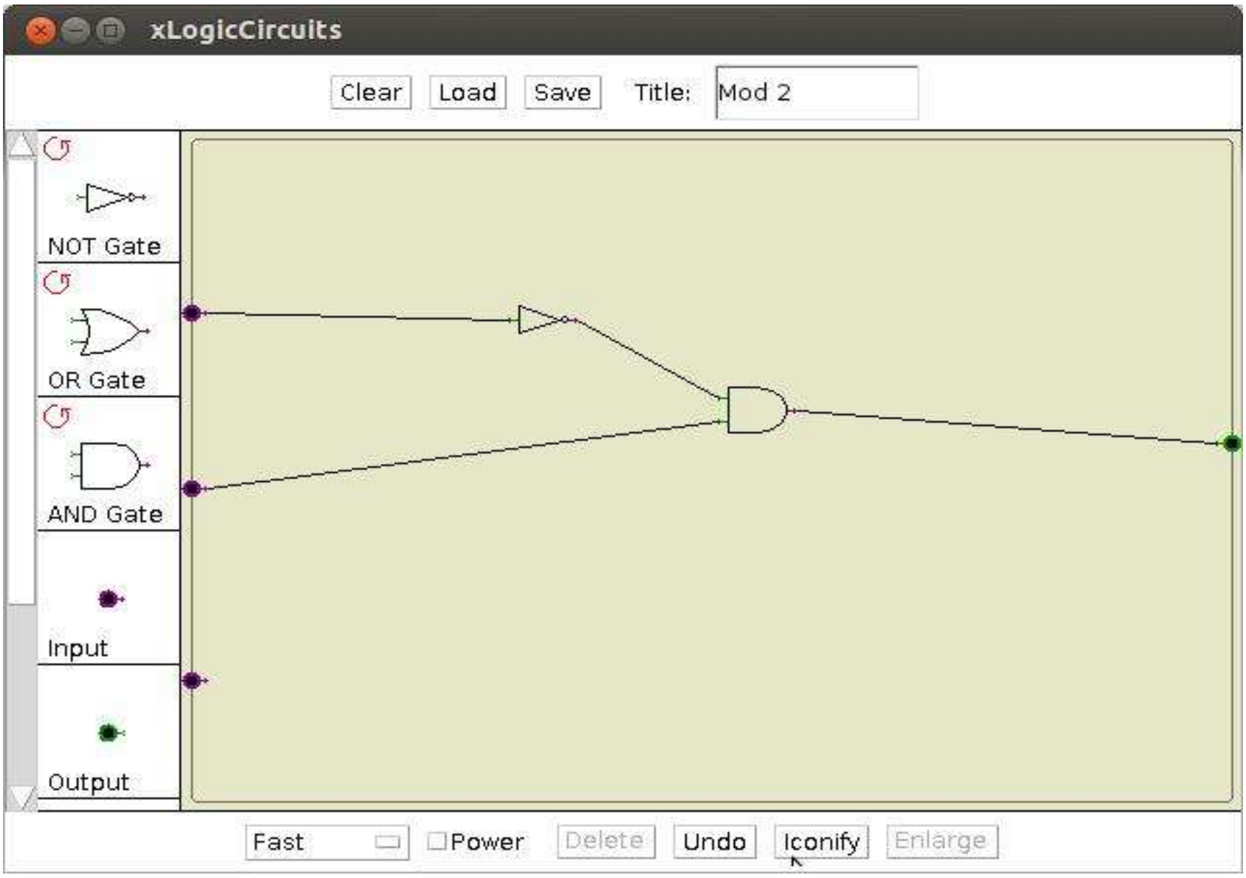



рис. 3

Слагаемому $(X \wedge Y \wedge Z)$ соответствует Mod 3 ,показанный на рис. 4

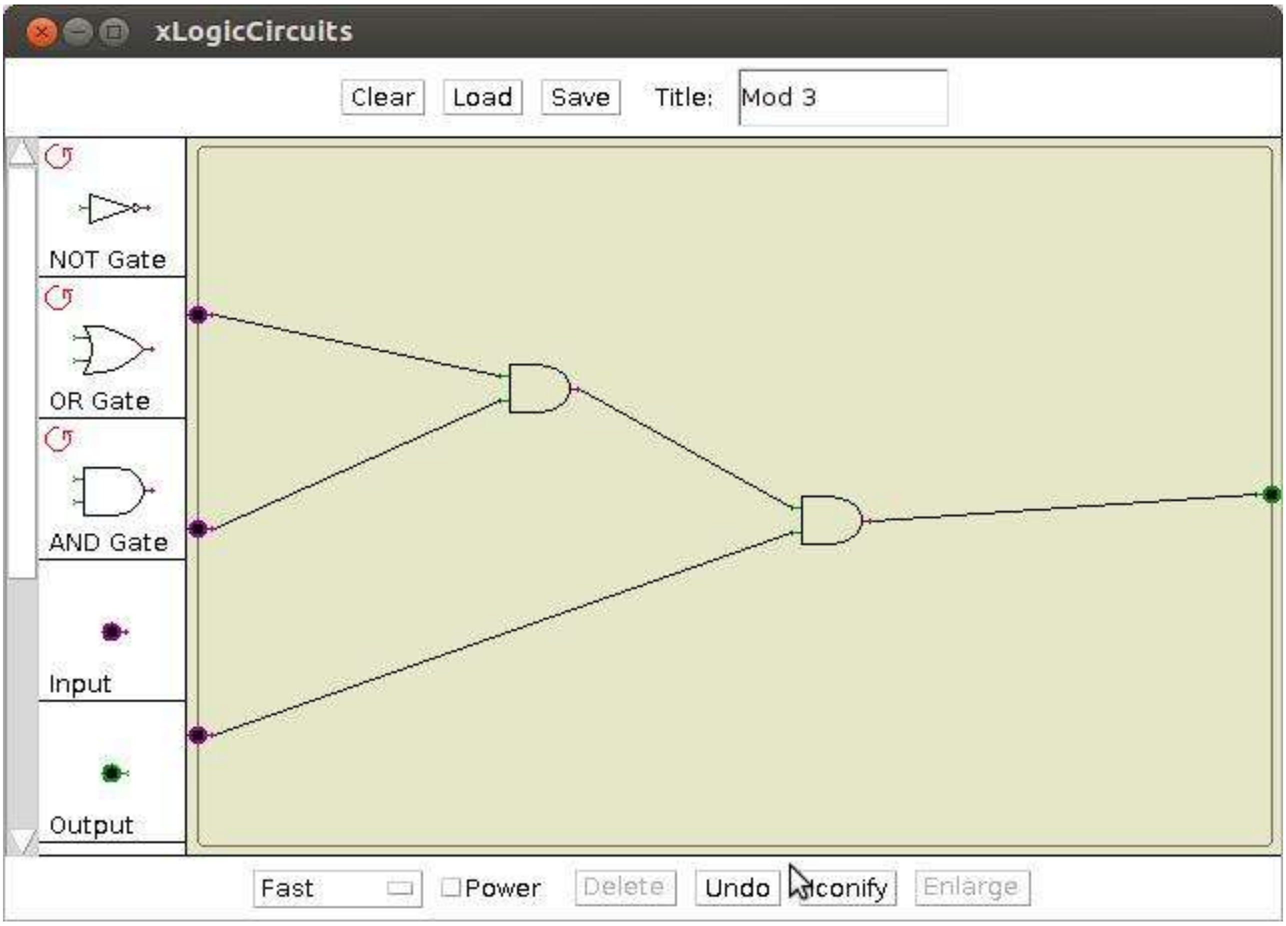



рис. 4

На рис.5 из модулей Mod 1,Mod 2,Mod 3 строится формула (4)

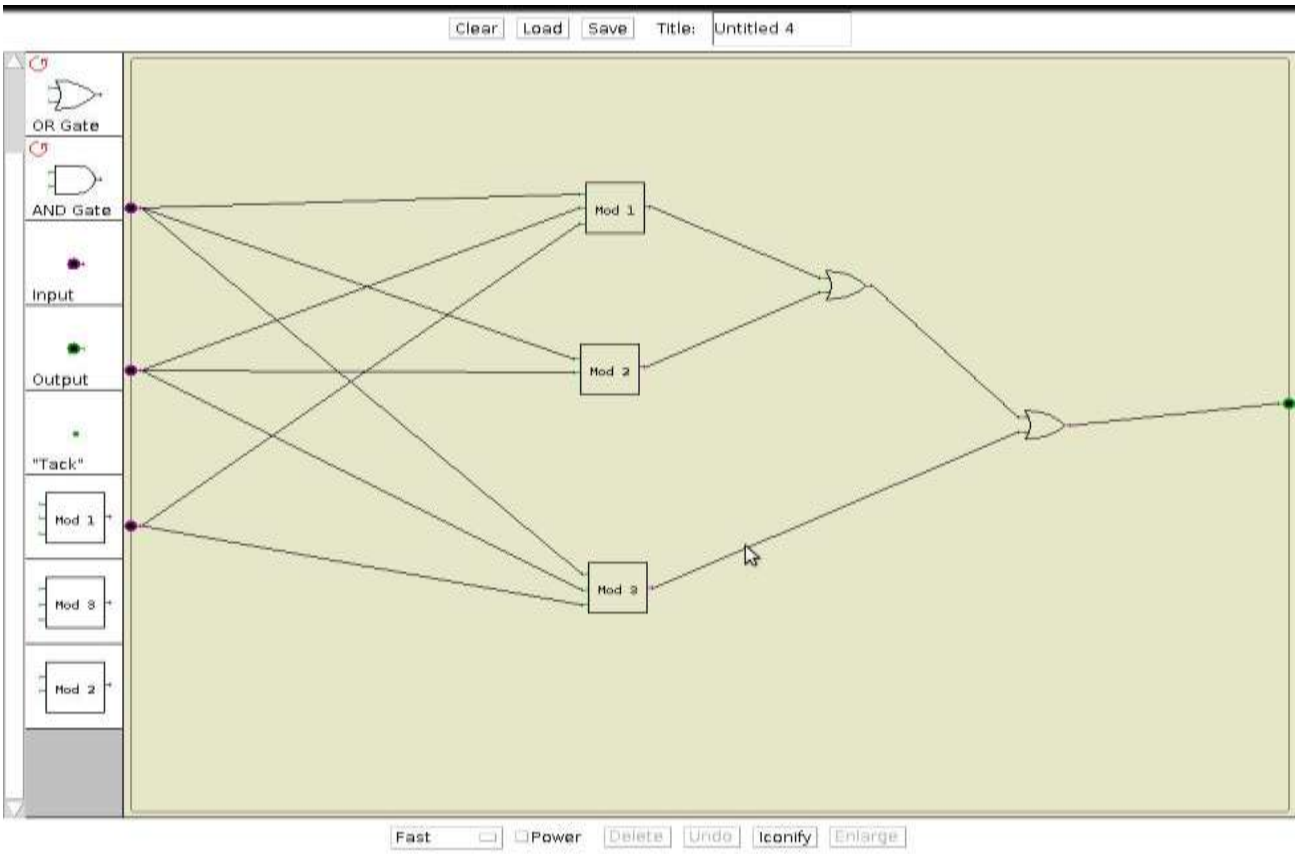



рис. 5

Проверяем работу схемы в соответствии с определением функции F. На рис. 6 показан тест X=0, Y=1, Z=1, F(0,1,1)=1

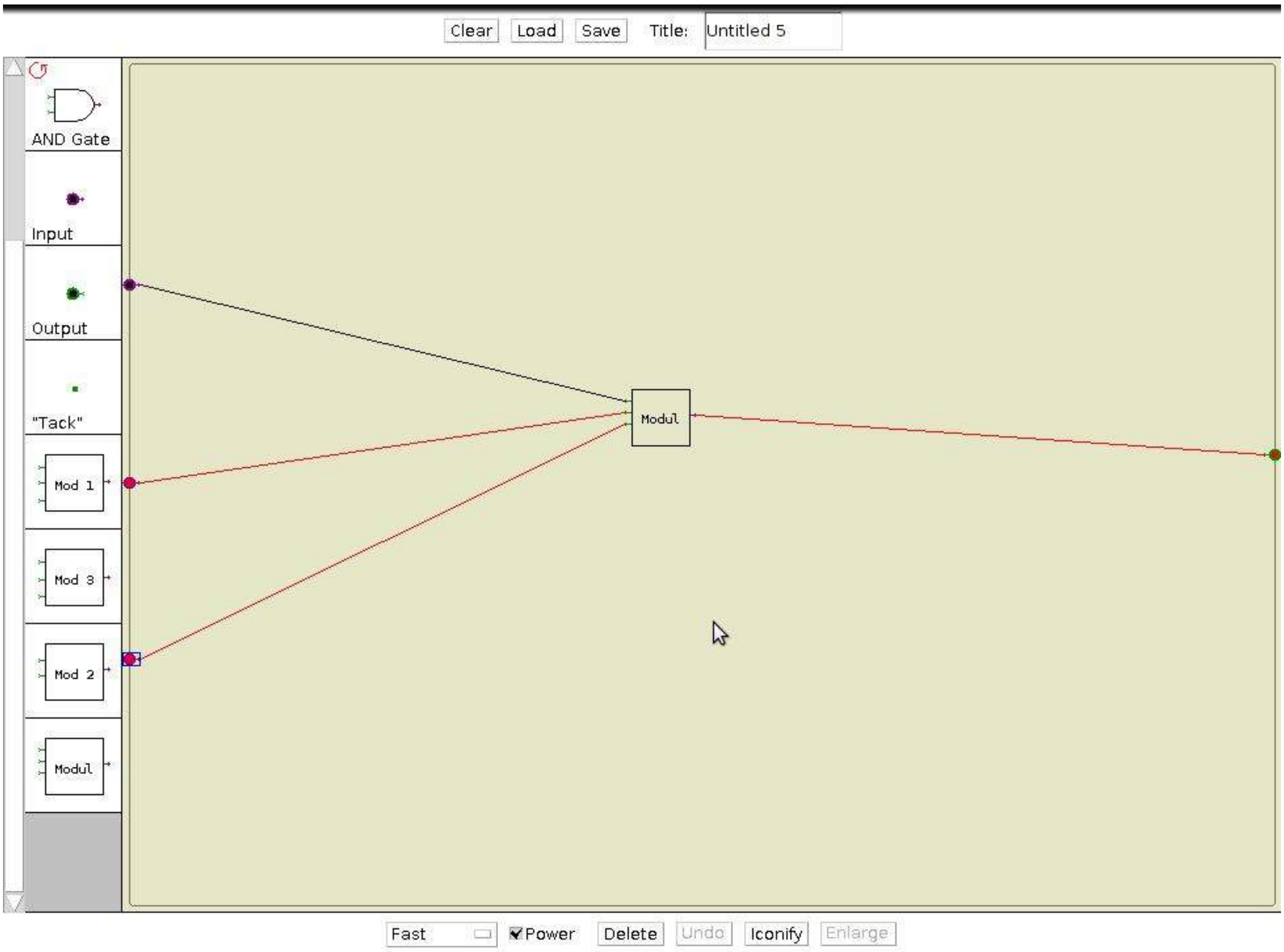



рис. 6

**Задание.**

1. В соответствии с вариантом написать и упростить формулу для логической функции , представленной своей таблицей (можно использовать дизъюнктивную или конъюнктивную форму)
2. С помощью программы xLogicCircuits построить и протестировать модульную логическую модель.

Вариант 0

| **X** | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** | **1** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Z | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| F | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Вариант 1

| X | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Z | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| F | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Вариант 2

| X | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Z | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| F | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Вариант 3

| X | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Z | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| F | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Вариант 4

| X | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Z | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| F | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Вариант 5

| X | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Z | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| F | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Вариант 6

| X | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Z | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| F | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Вариант 7

| **X** | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** | **1** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Z | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| F | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Вариант 8

| **X** | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** | **1** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Z | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| F | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

Вариант 9

| **X** | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** | **1** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Z | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| F | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |