

Лаборатория прикладной математики.

Метод простых итераций для решения линейных систем

1. Введение

Систему линейных алгебраических уравнений можно записать в матричной форме:

$$AX = B. \quad (1)$$

Коэффициенты системы a_{ij} и правые части b_j в (1) обычно предполагаются вещественными, однако при этом не исключается возможность принадлежности их к полю комплексных чисел.

Итерационные методы в отличие от точных методов позволяют за конечное число шагов m достичь ε -окрестности решения системы (1), где ε – заданная точность. Число шагов или итераций m определяется выбором начального приближения $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$, погрешностью ε и зависит от коэффициентов матрицы системы.

Для проведения итерационного процесса система (1) записывается в виде:

$$X = \alpha X + \beta, \quad (2)$$

Где $\alpha = E - ZA, \beta = ZB$. (3)

Матрица Z выбирается так, чтобы выполнялось достаточное условие сходимости метода простых итераций:

$$\|\alpha\| = q < 1 \quad (4)$$

Напомним, что нормой вектора B и матрицы A называются соответственно следующие числа:

$$\|B\| = \sum_{i=1}^m |b_i| \quad (5)$$

$$\|A\| = \max_j \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right\}. \quad (6)$$

Процесс последовательного приближения по методу простых итераций может быть построен в соответствии с формулами

$$x^{(m+1)} = \alpha x^{(m)} + \beta, \quad (7)$$

где начальное приближение есть столбец свободных членов:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Если $\|\alpha\| = q < 1$, последовательность $x^{(m)}$ сходится по норме к истинному решению x^* , т.е. $\lim_{m \rightarrow \infty} \|x^{(m)} - x^*\| = 0$ и справедливы оценки:

апостериорная

$$\|x^{(m)} - x^*\| \leq \frac{q}{1-q} \|x^{(m)} - x^{(m-1)}\| \quad (9)$$

и априорная

$$\|x^{(m)} - x^*\| \leq \frac{q^m}{1-q} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|. \quad (10)$$

Из априорной оценки (10) следует, что для достижения требуемой точности ε необходимо выполнить количество итераций m , которое является ближайшим натуральным числом, превышающим:

$$m \geq \frac{\ln \left(\frac{\varepsilon(1-q)}{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|} \right)}{\ln q}. \quad (11)$$

Апостериорная оценка (9), как правило, используется в качестве практического критерия остановки итерационного процесса.

Если

$$\|x^{(m)} - x^{(m-1)}\| \leq \frac{\varepsilon(1-q)}{q}, \quad (12)$$

требуемая точность ε достигнута и процесс последовательного приближения к решению x^* прекращают.

В качестве примера решим с точностью $\varepsilon = 0,01$ методом простой итерации систему уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Все вычисления будем производить до пятого знака после запятой, округляя результат.

Преобразуем исходную систему, выразив из первого уравнения x_1 , из второго – x_2 , а из третьего – x_3 . Получаем следующие итерационные формулы

$$\begin{aligned} x_1^{(m+1)} &= 0 \cdot x_1^{(m)} - 0,25 \cdot x_2^{(m)} + 0,25 \cdot x_3^{(m)} + 0 \\ x_2^{(m+1)} &= 0,2 \cdot x_1^{(m)} + 0 \cdot x_2^{(m)} + 0,2 \cdot x_3^{(m)} - 0,2 \\ x_3^{(m+1)} &= -0,25 \cdot x_1^{(m)} + 0,25 \cdot x_2^{(m)} + 0 \cdot x_3^{(m)} - 0,25 \end{aligned} \quad (14)$$

Отсюда $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -0,25 & 0,25 \\ 0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,25 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,2 \\ -0,25 \end{pmatrix}.$

Найдём норму матрицы

$$\|\alpha\| = \max |0,2| + |-0,25|; |-0,25| + |0,25|; |0,25| + |0,2| = 0,5.$$

Поскольку $\|\alpha\| = q = 0,5 < 1$, то метод простых итераций, построенный в соответствии с формулами (14), сходится. В качестве нулевого приближения выберем элементы вектора-столбца β , т.е. $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = -0,2$, $x_3^{(0)} = -0,25$.

Тогда $x_1^{(1)} = -0,0125$, $x_2^{(1)} = -0,25$, $x_3^{(1)} = -0,3$. Рассчитаем теперь на основании формулы (11) количество итераций, требуемых для достижения точности $\varepsilon = 0,01$.

$$\text{Имеем: } x^{(1)} - x^{(0)} = \begin{pmatrix} -0,0125 \\ -0,25 \\ -0,3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -0,2 \\ -0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0125 \\ -0,05 \\ -0,05 \end{pmatrix}$$

$$\|x^{(1)} - x^{(0)}\| = |-0,0125| + |-0,05| + |-0,05| = 0,1125,$$

$$m \geq \frac{\ln\left(\frac{0,01 \cdot (1 - 0,5)}{0,1125}\right)}{\ln 0,5} \geq \frac{-3,11352}{-0,69311} \geq 4,49.$$

Таким образом, из априорной оценки следует, что $m = 5$. Дальнейшие исследования приведены в таблице 1.

Таблица 1

m	$x_1^{(m)}$	$x_2^{(m)}$	$x_3^{(m)}$	$\sum_{i=1}^3 x_i^{(m)} - x_i^{(m-1)} $
0	0,0000	-0,20000	-0,25000	—
1	-0,01250	-0,25000	-0,30000	0,11250
2	-0,01250	-0,25250	-0,30938	0,02188
3	-0,01172	-0,26438	-0,31250	0,00578

Для сравнения приведём точное решение исходной системы:

$$x_3 = -0,31325,$$

$$x_2 = -\frac{20 \cdot 130}{415} + 6 = -0,26506,$$

$$x_1 = \frac{1}{5}(1 + 4 \cdot (-0,26506)) = -0,012048.$$

Ответ: $x_1 = -0,012$, $x_2 = -0,264$, $x_3 = -0,313$.

2. Задание

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса и методом простых итераций.

$$\begin{cases} (20N + 15,1)x_1 + (3N + 4)x_2 + (5N + 7)x_3 = 30N + 29,1; \\ x_1 + (10,5 + N)x_2 + (N + 0,01)x_3 = 2N + 1,02; \\ (N - 1,9)x_1 + (N + 4,002)x_2 + (16 + 4N)x_3 = 9N + 30,1. \end{cases}$$

N- номер варианта.